Titu Andreescu Bogdan Enescu Mircea Lascu Ovidiu Pop

C. Burdușel , A. Ghioca, R. Ilie, E. Jecan, D. Luca, D. Marinescu, I. Mureșan, A. Al. Oprea, O. Purcaru, Șt. Smărăndoiu, Gh. Stoianovici, D. Șerbănescu, V. Tudoran, Gh. Vieru

OLIMPIADELE DE MATEMATICĂ

2000 – 2001
CLASELE V-X

EDITURA GIL

Cuprins

ENUNȚURI

I. Olimpiada națională de matematică: etapa locală

ARAD

Clasa a V-a

1. La împărțirea a două numere naturale, câtul este de șase ori mai mic decât diferența dintre deîmpărțit și rest, împărțitorul este de trei ori mai mare decât câtul, iar restul este strict mai mare decât 4. Să se reconstituie împărțirea.
2. Fie: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid \overline{27x} \vdots 2\}$, $B = \{y \in \mathbf{N} \mid y = 2^{n+2} - 3n,\ n \in \mathbf{N},\ n \le 3\}$, $C = \{z \mid z$ este ultima cifră a lui n^2, $n \in \mathbf{N}\}$.
   a) Să se calculeze $A \cup B$, $A \cap B$, $A - C$.
   b) Să se arate că $A \cup (B \cap C) = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$.
3. Calculați: $(1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + 1992\cdot 1993 + 1987021):(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 1993^2)$.

Clasa a VI-a

1. Să se arate că, dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a, b, c, d $\in \mathbf{N}^*$, atunci se poate forma o proporție cu numerele (a, d), [b, c], (b, c), [a, d].
2. Un număr de 1236 cifre este scris cu cifrele 1, 2 și 3 și cu 12 zerouri. Numărul de apariții al cifrelor 1, 2 și 3 este direct proporțional cu respectiv 1, 2 și 3. Să se arate că numărul dat nu este pătrat perfect.
3. Trei elevi aveau la bancă a, b, respectiv c lei. Pentru a pleca într-o excursie, au scos de la bancă b%, c%, respectiv a%, din care au cheltuit c%, a%, respectiv b%, astfel încât împreună au cheltuit 1992000 lei. Să se afle ce sumă a cheltuit fiecare.
4. Fie unghiul alungit AOB, precum și unghiurile AOC și COD, în același semiplan, congruente, iar raportul măsurilor unghiurilor COD și DOB este $\frac{2}{5}$. Să se calculeze măsurile unghiurilor COD și DOB.

Clasa a VII-a

1. Să se arate că numerele de forma $A = \overline{\underbrace{99...9}_{99\text{ori}}a}$, $a \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, nu sunt prime.
2. Să se arate că:
$$\frac{1}{50} + \frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \ldots + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{98}{99\cdot 100} + \frac{97}{98\cdot 99} + \frac{96}{97\cdot 98} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 3}.$$
3. Să se arate că fracția $\frac{n^2 - n + 2}{n^2 + 3n + 2}$, $n \in \mathbf{N}$, este reductibilă.
4. Fie ABCD un paralelogram, M și N mijloacele laturilor [BC] și [CD], iar E și F simetricele punctelor D și B față de M și N. Arătați că:
   a) tripletele (A,B,E), (A,D,F) și (F,C,E) sunt puncte coliniare;
   b) dreptele AC, DE și BF sunt concurente.

Clasa a VIII-a

I. 1. Cifra x pentru care egalitatea: $\overline{2x31}+\overline{24x2}+\overline{5x3} = \overline{5x16}$ este adevărată, este: ....

2. Suma $S = \sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{27}+\sqrt{48}+\ldots+\sqrt{300}$ are valoarea ....

3. La o afacere s-a pierdut 13% și s-a încasat cu 93600 mai puțin. Suma inițială este de .... lei.

4. Fie numerele $a = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2000}$ și $b = 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{1999}{2000}$. Media aritmetică a numerelor a și b este egală cu ....

5. Aria unui triunghi având un unghi cu măsura de 15° și ipotenuza de 16 cm, este egală cu .... cm^2.

6. Numerele pare consecutive direct proporționale cu măsurile unghiurilor unui triunghi dreptunghic, sunt: ....

7. Valoarea lui $a\in \mathbf{R}$ din: $[-2, 4)\cap[-a, 5) = [a, 4)$, este: ....

8. Dacă un dreptunghi are perimetrul de 2 cm, atunci aria sa nu va depăși .... cm^2.

9. Fie $M\notin(ABC)$ astfel încât $[AM] \equiv [BM] \equiv [CM]$. Proiecția lui M pe planul (ABC) este ....

II. 1. Să se arate că numărul $A = n^2+ 1996n + 2$, $n \in \mathbf{N}$, nu poate fi pătrat perfect.

2. a) Să se arate că, oricare ar fi $n\in \mathbf{N}$, există $p\in \mathbf{N}$, astfel încât

$$\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2=\sqrt{p+1}+\sqrt{p}.$$

b) Fie $a, x \in \mathbf{R}^*$, astfel încât $a=\frac{x^2}{x^2+x+1}$. Să se calculeze $b = x+\frac{1}{x}$, $c = x^2+\frac{1}{x^2}$ și $d=\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ în funcție de a.

3. Fie rombul ABCD, cu măsura unui unghi ascuțit de 60°, $MA \perp (ABC)$, $MA=AB = a$.
a) Să se determine măsurile unghiurilor făcute de dreptele MB, MC, MD cu planul (ABC).
b) Să se determine tangenta unghiului făcut de planul (MBD) cu planul (ABC).
c) Să se arate că planele (MBC) și (MCD) fac cu planul bazei unghiuri congruente.

Clasa a IX – a

1. Să se arate că există $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $a<\sqrt{4x^2+9}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1}\right)\le b$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Care este cel mai mic număr b care verifică relația?

2. Să se demonstreze că patrulaterul care se obține prin unirea mijloacelor laturilor consecutive ale unui paralelogram este tot un paralelogram. (soluție vectorială)

3. Fie ABCD paralelogram. Să se determine un punct M în interiorul paralelogramului astfel încât $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

4. Se dau $a_k \in \mathbf{N}$, $k \in \{1, 2,..., n-1\}$, $a_k \ge 2$, distincte două câte două. Să se demonstreze că: $\left(1-\frac{1}{a_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{a_2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{a_{n-1}^2}\right)\ge\frac{n+1}{2n}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$.

Clasa a X – a

1. Să se rezolve:
a) $(2-i)z^2-(4-12i)z+14-12i=0$ în mulțimea numerelor complexe.
b) $\alpha^n+\beta^n=-1$ unde $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ sunt rădăcinile ecuației $x^2+x+1=0$, în $\mathbf{N}\cap[0; 100]$.

2. Fie $a, b, x, y, z \in \mathbf{R}$ astfel încât:
(i) x, y, z să fie în progresie geometrică,
(ii) x, y + a, z să fie în progresie aritmetică,
(iii) x, y + a, z + b să fie în progresie geometrică.
Cerințe:
a) să se determine x, y, z pentru a = 4 și b = 32;
b) să se determine x, y, z pentru a, b oarecare.

3. Dacă $a, b, c \in (1, \infty)$. Să se arate că: $\left(\log_a\frac{b+c}{2}\right)\left(\log_b\frac{c+a}{2}\right)\left(\log_c\frac{a+b}{2}\right)\ge 1$.

4. Rezolvați ecuația: $\sin 26x + \cos 40x = 2$ și demonstrați că mulțimea soluțiilor acestei ecuații se poate reprezenta sub forma $\left\{\frac{\pi}{k}+n\pi \mid n\in \mathbf{Z}\right\}$, unde $k \in \mathbf{N}$ se va determina.

ARGEȘ

Clasa a V-a

1. Să se arate că numărul $n = 1+2\cdot3+4\cdot5\cdot6+7\cdot8\cdot9\cdot10+11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15$ nu este pătrat perfect.

2. a) Să se arate că numărul $p = 13+13^2+13^3+\ldots+13^{2000}$ este divizibil cu 10.
b) Să se arate că numărul 13^{2001} poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte.

Ioan Chera

3. Să se afle numărul $\overline{xyz}$ știind că $\overline{xyz0}+\overline{xyz}=2002$.

Ilie Trifon

4. Se consideră mulțimea X = {1, 3, 5, 7, …, (2n + 1), …}. Construim următorul șir de submulțimi ale mulțimii X: $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3,5\}$, $A_3 = \{7,9,11\}$, ș.a.m.d.
a) Scrieți mulțimile A_4 și A_5.
b) Calculați suma elementelor mulțimii A_{20}.

Sorin Peligrad

Clasa a VI-a

1. Să se afle elementele mulțimii: $A=\left\{\overline{xyz}\ \middle|\ \frac{x+1}{x}=\frac{y+2}{y}=\frac{z+3}{z}\right\}$.

I. Safta

2. Să se arate că nu există numere naturale x, y, z astfel încât $31 \mid (4x+3y)$ și $5x = 4y+31z+1$.

Gh. Molea

3. Fie $a=\frac{7}{2x+3y}$, $b=\frac{2x+3y}{3x+1}$, $c=\frac{3x+1}{7}$, $d=\frac{25}{(x+2)^2+(2y+1)^2}$, $x, y \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că numerele a, b, c sunt simultan naturale dacă și numai dacă d este număr natural.

Sorin Peligrad

4. a) Fie A, B, C, D patru puncte coliniare, în această ordine, astfel încât $AB+AD = 2\cdot AC$ şi $BD = 2^{31}$ cm. Să se afle lungimea segmentului [BC].

b) Semidreapta [OC este bisectoarea unghiului AOB, iar semidreapta [OD este interioară unghiului BOC. Ştiind că $m(\sphericalangle AOB) = p°$ şi $m(\sphericalangle COD) = q°$, să se afle măsurile unghiurilor AOD şi BOD.

Tică Diaconu Vasile, Dinuţă Nicolae

Clasa a VII-a

1. a) Să se arate că nu există $x, y \in \mathbf{Z}$ astfel încât $x^2 + y^2 = x + y + 2001$.

b) Fie $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, astfel încât $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}+...+\frac{n}{x-n} = 1$ (*) şi $x = \frac{n(n+1)}{2}$. Să se arate că $\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{9}{x-3}+...+\frac{n^2}{x-n} = 0$ (**).

Ion Cojocaru

2. Fie $2\cdot\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{2}{a_2a_3}+\frac{3}{a_3a_4}+...+\frac{n}{a_na_{n+1}}\right) \geq n(n+1)$, $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,a_{n+1} \in \mathbf{N}^*$. Să se calculeze $p = \sqrt{a_1a_2a_3...a_{n+1}}\cdot(a_1+a_2+a_3+...+a_{n+1})^{-2}$.

Gh. Molea

3. Fie ΔABC, $m(\sphericalangle B) = 105°$, $m(\sphericalangle C) = 30°$, $D,E \in (BC)$, $[BD] \equiv [DC]$, $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle CAE$. Să se afle $m(\sphericalangle DAE)$.

Sorin Peligrad

4. În ΔABC, bisectoarea [BB'], $B' \in (AC)$, intersectează mediana [AD], $D \in (BC)$, în P.

a) Să se determine $n \in \mathbf{N}$, astfel încât $\frac{AP}{PD}\cdot\frac{B'C}{AB'} = 2^n$.

b) Să se arate că, dacă triunghiurile AB'P şi BDP sunt echivalente, atunci P este centrul de greutate al ΔABC.

I. Safta

Clasa a VIII-a

1. Există numărul natural $\overline{xy3yx}$, care să fie pătrat perfect ?

Ilie Trifon

2. Dacă $a \in [0, 1]$ şi $b \in [0, 1]$, atunci $\frac{a^2}{b+1}+\frac{b^2}{a+1} \leq 1$.

Sorin Peligrad

3. Fie ΔABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$, $MB \perp (ABC)$, $AC = b$, $AB = c$, $MB = a$, $MC = d$, $a, b, c, d \in \mathbf{N}$. Să se arate că: $\frac{ab+ac+bc}{a+b+c+d} \in \mathbf{N}$.

4. Fie ΔABC, [AM bisectoarea unghiului A, astfel încât $MB = 3\cdot MC$, $M \in (BC)$, $BN = 2\cdot NA$, $N \in (AB)$ şi $AD \perp (ABC)$. Să se arate că distanţa d de la A la planul (DNC) verifică relaţia: $d < \frac{AB+3\cdot AD}{6\sqrt{2}}$.

Gh. Molea

Clasa a V – a

1. Să se arate că suma: $S = 2001^p + 2001^p + ... + 2001^p$, având 2000 de termeni, este divizibilă cu $87\cdot10^3$, unde p este număr natural.

I.Radu

2. Se dă numărul: $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2001}$ şi propoziţia p: "a este impar şi a este pătrat perfect". Să se precizeze şi să se justifice dacă propoziţia p este adevărată sau falsă.

Gh. Gandu

3. Fie $A = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = a\cdot b+a+b$, a şi b sunt cifre în baza 10$\}$. Să se determine cardinalul mulţimii A.

Costică Lupu

4. Fie numerele $a = 5n+3$ şi $b = 8n+5$, $n \in \mathbf{N}$. Arătaţi că $[a,b] = ab$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

E. Tarasa

CLASA a VI – a

1. a) Fie numărul:

$$a = (2^3+2^3+2^4+2^5+...+2^{10})\left(\frac{1}{1+2+...+1024}+\frac{1}{1+2+...+1025}+...+\frac{1}{1+2+...+2047}\right).$$

Să se arate că $a \in \mathbf{N}$.

Fl. Ganaite

b) Să se determine cele mai mici numere naturale nenule x, y, z, u pentru care avem: $\frac{x}{y} = \frac{5y}{7z} = \frac{7z}{11u} = \frac{11u}{5x}$.

E. Tarasa

2. Suma dintre produsul şi raportul a două numere naturale nenule este 260. Să se afle numerele.

V. Stoica

3. Un număr A de 2001 cifre este scris cu cifrele 4, 5, 6 şi cu 606 zerouri. Numerele de apariţii ale cifrelor 4, 5 şi 6 sunt direct proporţionale cu 4, 5 şi 6. Să se arate că A nu este pătrat perfect.

Costică Lupu

4. Unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente suplimentare, $m(\sphericalangle AOB) = 45°$. În acelaşi semiplan cu (OB, construim $OD \perp OB$. Fie [OM bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOP$ şi [OR bisectoarea unghiului $\sphericalangle DOM'$, unde [OP este bisectoarea lui $\sphericalangle COD$ şi [OM' este opusa semidreptei [OM. Să se determine măsura unghiului $\sphericalangle POR$.

Cristina Andrei

Clasa a VII-a

1. Fie mulţimile: $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \,\middle|\, \frac{x^2-4}{x} \in \mathbf{N}\right\}$ şi $B = \left\{y \in \mathbf{Z} \,\middle|\, \frac{2y+1}{y-1} \in \mathbf{N}\right\}$.

a) Să se calculeze $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$.

b) Să se arate că: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Gh. Gandu

2. Fie $E = (a+3)(b+4)(c+5)(d+6)$, unde a, b, c, d sunt numere reale pozitive astfel încât $ad = 2$, $bc = 5$. Să se arate că $E \geq 6^4$.

Costică Lupu

3. În exteriorul triunghiului ABC oarecare se construiesc pătratele ABMN și BCDE. Știind că $P \in (AC)$, astfel încât $BP \perp ME$, precizați poziția punctului P.

E. Tarasa

4. În ΔABC oarecare, fie $D \in (BC)$. Bisectoarea unghiului ADB intersec-tează pe AB în E. Să se arate că: $DE^2 = AD \cdot BD - AE \cdot BE$.

Costică Lupu

Clasa a VIII – a

1. a) Dacă $a \geq b \geq c > 0$, atunci $\sqrt{(a+b)(a-b)} + \sqrt{(b+c)(b-c)} < a + b$.

b) Aflați $x, y, z \in \mathbf{R}$, pentru care: $\sqrt{2x^2+12x+27} + \sqrt{y^2+4y+5} \leq 3+2z-z^2$.

I. Radu, Gh. Gandu

2. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ verifică relația $f(2x+1) = 3x - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Să se determine punctele de pe graficul lui f care au coordonate întregi.

Gh. Neagu

3. Pe planul pătratului ABCD se ridică perpendiculara ME, unde $M \in (AC)$. Dacă $AE \perp CE$ și $m(\sphericalangle EBD) = 2 \cdot m(\sphericalangle CAE)$, aflați:
a) măsura unghiului dintre planele (BDE) și (ABC);
b) măsura unghiului dreptei DE cu planul (ABC).

E. Tarasa, Costică Lupu

4. Fie ΔABC isoscel, cu $AB = AC = a$ și $BC = a\sqrt{3}$, $MA \perp (ABC)$, $E = pr_{MC}A$ și $F = pr_{MC}B$ (proiecții ortogonale).

a) Dacă unghiul dreptelor AE și BF este "u" și $\sin u = \dfrac{2}{3}$, calculați lungimea segmentului MA.
b) Calculați "u" în cazul în care F coincide cu M.

Gh. Gandu

BIHOR

Clasa a V - a

1. Determinați baza de numerație x știind că: $123_{(x)} + 321_{(x)} = 228$.

Radu Ghenghiu, Oradea

2. Suma a trei numere este 57. Dacă împărțim primul număr la al II-lea obținem câtul 3 și restul 1, iar dacă împărțim al II-lea număr la al III-lea obținem câtul 3 și restul 1. Să se afle numerele.

***

3. Fie $A = \{ x \in \mathbf{N} \mid x \leq a : 21,\ a = 1+2+3+\ldots+18+19+20 \}$ și $B = \{ y \in \mathbf{N} \mid 9 < y \leq 15 \}$. Calculați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
4. Comparați numerele $a = 2^{90} + 2^{90} + 2^{91} + 2^{92}$ și $b = 3^{62}$.

Clasa a VI-a

I. Să se determine elementele mulțimii: $A = \{ \overline{abc} \in \mathbf{N} \mid \overline{ab}^2 + \overline{ab}^2 \cdot \overline{ac} = 2000 \}$

***

II. La teza de matematică elevii unei clase au primit o problemă de algebră și una de geometrie. Se știe că 5 elevi au rezolvat corect ambele probleme, 68% au rezolvat corect problema de algebră, iar 52% au rezolvat corect problema de geometrie. Să se afle:

a) câți elevi sunt în clasă;
b) câți elevi au rezolvat corect problema de algebră;
c) câți elevi au rezolvat corect problema de geometrie.

***

III. Arătați că numărul $A = \dfrac{8}{9} + \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{1}{9} \cdot 10^n$ este număr natural, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

***

IV. Fie punctele $A, O, B \in d$, scrise în această ordine, iar punctele C și D situate de o parte și de alta a dreptei "d" astfel încât $m(\widehat{AOC}) = 10°$, iar $m(\widehat{BOD}) = \dfrac{4}{17} \cdot m(\widehat{BOE})$, unde (OE este bisectoarea unghiului $(\widehat{BOC})$. Să se arate că orice punct Q de pe bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$ este coliniar cu punctele O și C.

Romulus Pleşa, Viorica Pleşa, Oradea

V. Dacă adunăm jumătatea, sfertul și optimea măsurii unghiului x, obținem suplementul său. Care este măsura complementului suplementului unghiului x?

***

Clasa a VII - a

I. Să se determine baza de numerație x, știind că:

$$\sqrt{(25_{(x)} + 52_{(x)}) \cdot (34_{(x)} + 43_{(x)})} - 1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2.$$

Radu Ghenghiu, Oradea

II. Să se arate că numărul 24^n se poate scrie ca o diferență de două pătrate perfecte nenule, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Florin Nicoară, Oradea

III. Să se determine numerele naturale, prime x, y, z știind că:

$$(x + 3y - 4z)(8x - 36) = (2x - 3y + 4z)(36 - 5x).$$

Romulus Pleşa, Viorica Pleşa, Oradea

IV. În pătratul MNPQ notăm cu O intersecția diagonalelor și cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor MON, NOP, POQ respectiv QOM. Să se arate că G_1, G_2, G_3, G_4 sunt vârfurile unui pătrat.

Szabó Gyöngyi, Oradea

V. În patrulaterul convex ABCD se știe că: $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ADC}$, $M \in [AD]$, $MA = MD$, $AB \cap CD = \{N\}$. Știind că distanțele de la punctul O la laturile AB și CD sunt egale, să se demonstreze că punctele M, O și N sunt coliniare.

Florin Nicoară, Oradea

Clasa a VIII-a

1. Fie $x, y \in \mathbf{R}$ astfel încât $x - y + 1 = 0$ și $y \in [1, 3]$. Arătați că:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13} = 2\sqrt{2}$$

2. Să se demonstreze că numărul

$$P = x(x+1)^2\ 26x - 8(x+1)^2 + 2$$ este divizibil cu 3, $\forall x \in \mathbf{Z}$.

3. Fie prisma patrulateră regulată ABCDA'B'C'D'. Diagonala BD' formează cu fața ADD'A' un unghi de 30°. Știind că latura bazei este a să se afle:

a). d(B', AD');

b). d(D', AC);

c). fie E și F mijloacele muchiilor CC' respectiv AB. Să se afle aria triunghiului EFD'.

Clasa a IX - a

I .Se consideră ecuația :

$$x^2 + (m-3)x + \left[\frac{k+1}{k}\right] + \left[\frac{k+2}{k+1}\right] + \dots + \left[\frac{k+m}{k+m-1}\right] + 4 = 0, \quad \text{unde } m \in \mathbf{N}^*,$$

$k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, iar $[\dots]$ reprezintă partea întreagă a numărului respectiv.

a) Să se determine $m \in \mathbf{N}^*$ astfel încât între rădăcinile ecuației să existe relația $x_1^2 + x_2^2 = \frac{8}{3}$.

b) Să se determine între rădăcinile ecuației o relație independentă de m.

* * *

II . Să se demonstreze că $\forall a, b > 0$ astfel încât $a + b = 1$ are loc inegalitatea :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq 3\sqrt{2}$$

Andras Szilard, Cluj

III. Să se determine o formulă pentru calculul sumei de mai jos , apoi să se demonstreze veridicitatea acsteia prin metoda inducției matematice:

$$S = [\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot4}] + [\sqrt{2\cdot3\cdot4\cdot5}] + \dots + [\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}],\ n \in \mathbf{N}^*$$

unde [...] reprezintă partea întreagă a numărului respectiv.

Ioan Cuc, Oradea

IV. Să se demonstreze că distanța de la centrul cercului circumscris unui triunghi oarecare la o latură a sa, este egală cu jumătatea distanței de la ortocentrul triunghiului la vârful opus acestei laturi.

* * *

V. Se consideră triunghiul ABC cu lungimile laturilor AB = c, AC = b, BC = a. Se notează cu P intersecția dintre mediana BD (D ∈ [AC]) și bisectoarea CE a unghiului BCA (E ∈ [AB]). Să se determine în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC, numerele reale x și z astfel încât să aibă loc relația :

$$\overrightarrow{PA} = x\overrightarrow{PB} + y\overrightarrow{PC}$$

* * *

Clasa a X - a

I. a) Să se demonstreze că $\forall a, b, c, d \in \mathbf{R}_+$ are loc inegalitatea:

$$\sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leq \sqrt{(a+b)(c+d)}$$

b) Să se demonstreze că:

$$\sqrt{a \cdot \log_{a+b}\sqrt{2a}} + \sqrt{b \cdot \log_{a+b}\sqrt{2b}} \leq \sqrt{a+b} \quad \forall a, b \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

***

II. Să se rezolve sistemul : $\begin{cases} 4^x + 98 = 2\cdot3^{y+2} \\ 9^y - 31 = 2\cdot5^{z+1} \\ 25^z + 103 = 2^{x+4} \end{cases}$

prof. Romulus Pleșa, prof. Viorica Pleșa, Oradea

III. Să se demonstreze că dacă $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbf{C}^*$ și $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n|$ atunci:

$$\left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right)\left(1 + \frac{z_3}{z_2}\right)\dots\left(1 + \frac{z_n}{z_{n-1}}\right)\left(1 + \frac{z_1}{z_n}\right) \in \mathbf{R}.$$

***

IV. Măsurile unghiurilor unui triunghi se notează cu α, β, γ. Dacă $(1+\text{tg}\,\alpha)\cdot(1+\text{tg}\,\beta) = 2$, să se calculeze γ.

***

V. Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care $\log_2 1,\ \log_2(-\cos 2x),\ \log_2 \cos^2 x$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

***

BISTRIȚA - NĂSĂUD

Clasa a V – a

I. 1. Rezultatul calculului:

a) $10\cdot\{4 + 10\cdot[2 + 10\cdot(48 + 48:4)]\}$ este ....;

b) $2^{15}\cdot4^{20}\cdot8^3\cdot16^5$ este ....

2. Rezultatul sumei în baza 10:

a) $11101_{(2)} + 1211_{(3)} + 2113_{(4)}$ este ....;

b) $120_{(4)} + 242_{(5)} + 36_{(7)}$ este ....

3. Elementele mulțimii:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, -2 \leq x \leq 3\}$ sunt ....;

b) $B = \{y \mid y \in \mathbf{N}, 3 < y < 9\}$ sunt ....

4. Toate numerele de forma:

a) $\overline{2a3b} \vdots 360$ sunt ....;

b) $\overline{13x2y} \vdots 45$ sunt .... .

5. Forma simplă prin care numărul $A = 63^n + 7^{n+1}\cdot3^{2n+1} - 21^n\cdot3^{n+2}$ se poate arăta că este divizibil cu 13 este ....

6. Aflați numerele naturale x și y pentru care fracția:

a) $\frac{4}{(x+1)(y-3)}$ este supraunitară;

b) $\frac{4}{(x+1)(y-3)}$ este echiunitară.

II. 7. Să se arate că numărul $A = \overline{xyzt} + \overline{tzyx}$ se divide cu 11.

8. Un număr natural de 3 cifre, scris în baza 10, împărțit la răsturnatul său dă câtul 2 și restul 100. Aflați numărul, știind că diferența dintre cifra sutelor și cea a unităților este 4.

Clasa a VI – a

I. 1. Dacă $n = 35+5x+10y$ și $x+2y = 21$, atunci:
a) numărul n este ……....;
b) valoarea logică a propoziției $7|n$ este …… .

2. Rezultatul calculului:
a) $2,(3):3\frac{1}{2} = \ldots\ldots$;
b) $2,1(6)-2,(3):3\frac{1}{2}-\frac{2}{3} = \ldots\ldots$.

3. Se știe că $\frac{x}{5} = \frac{y}{20}$.
a) Valoarea raportului $\frac{x}{y}$ este …… .
b) x reprezintă …… % din y.

4. Două unghiuri sunt adiacente suplementare.
a) Măsura unghiului format de bisectoarele lor este ……°.
b) Dacă unul din ele are măsura 58° 36', atunci celălalt are măsura …… .

5. Unghiul ascuțit format de două drepte concurente reprezintă 20% din măsura unghiului obtuz.
a) Măsura unghiului obtuz este ……°.
b) măsura unghiului ascuțit este ……°.

6. Pe o dreaptă se consideră punctele A, B, C în această ordine. M este mijlocul lui [AB], N mijlocul lui [BC], MN = 8 cm și BC = 6 cm. Atunci:
a) lungimea lui [AB] este …… cm;
b) lungimea lui [MC] este …… cm.

II. 1. Să se determine măsurile u și v a două unghiuri complementare, știind că $\frac{u}{v} = \frac{a,(b)}{b,(a)}$, iar b este un divizor impropriu al lui a.

2. Fie segmentul [AB] și punctele C și D în același semiplan față de dreapta AB, astfel încât $[AD] \equiv [BC]$, $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle CBA) < 90°$ și $(AC) \cap (DB) = \{O\}$. Demonstrați că:
a) $[AC] \equiv [BD]$;
b) ΔDOC este isoscel.

Ioan Duicu

Clasa a VII - a

I. 1. Efectuând calculele $\left(\frac{3}{\sqrt{75}}-\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{2}{5\sqrt{3}}\right):\left(\sqrt{12}\right)^{-1}$ obținem: ……

2. Dacă $\frac{22b-a}{a} = \sqrt{\frac{0,0(6)-0,0(5)}{0,(3)+8,(6)+1}}\cdot 30$, atunci $\frac{a}{b} = \ldots\ldots$

3. Cel mai mare număr întreg x, cu proprietatea că $\frac{1}{x} < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ este ……

4. Fie $x = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ și $y = \sqrt{3}+\sqrt{2}$, atunci:
a) diferența dintre media aritmetică și media geometrică a lui x și y este ……;
b) media ponderată cu ponderile 3 și respectiv 2 a lui x și y este …… .

5. Dacă $m = \sqrt{5+\sqrt{24}} - \sqrt{5-\sqrt{24}} - \sqrt{8}$, atunci $m^{2001} = \ldots\ldots$.

6. Ecuația $\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2\cdot 2001$ are soluția …… .

7. Paralelogramul ABCD are $m(\sphericalangle A) = 60°$, $BD \perp AD$ și AB = 10 cm. Atunci:
a) AD = ... cm;
b) Perimetrul paralelogramului ABCD este .... dm.

8. Fie ABCD un trapez isoscel cu AB||CD. Dacă $4\cdot m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C)$, atunci $m(\sphericalangle A) = \ldots\ldots°$.

9. În rombul ABCD, E și F sunt mijloacele laturilor [AB], respectiv [CD]. Dacă $m(\sphericalangle B) = 120°$, atunci patrulaterul BEDF este ………….. .

II. 10. Să se rezolve în mulțimea numerelor întegi ecuația: $x^3y+x^2y^2 = 56$.

11. Dacă $a = (-11)\cdot(-12)\cdot(-13)\cdot\ldots\cdot(-20)$ și $b = 2^8\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot\ldots\cdot(-19)$, să se arate că $\sqrt{\frac{a}{b}}$ este număr natural.

12. Într-un triunghi ABC se dau: (AD bisectoare, $D \in (BC)$; (CE mediană, $E \in (A,B)$; $[AD] \equiv [CE]$ și $m(\sphericalangle AOE) = 60°$, $\{O\} = AD \cap CE$. Să se demonstreze că ΔABC este echilateral.

Autorul testului: Sanda Nicolae

Clasa a VIII – a

1. Fie $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-1| \le 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid |x+1| \ge 2\}$.
a) $A \cap \mathbf{N} = \ldots\ldots\ldots$.
b) $A \cap B = \ldots\ldots\ldots$.

2. Dacă $x \in \mathbf{R}^*$ și $x - \frac{1}{x} = 3$, atunci:
a) $x^2+\frac{1}{x^2} = \ldots\ldots$;
b) $x^3-\frac{1}{x^3} = \ldots\ldots$.

3. Dacă $MA \perp (ABC)$, MA = 4,8 cm și AB = BC = 10 cm, AC = 16 cm, atunci distanța de la punctul M la dreapta BC este ………. cm.

4. Fie ABCDA'B'C'D' un paralelipiped dreptunghic cu AB = 4 cm, BC = 8 cm și AA' = 12 cm. Tangenta unghiului dintre dreapta BD' și planul (DCC') este ………….. .